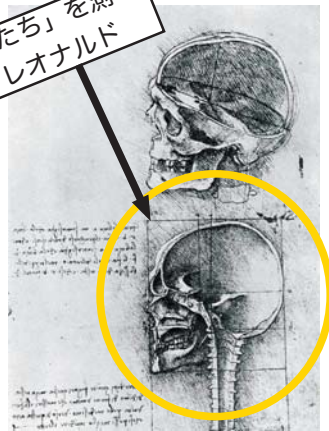




「かたち」を測る
レオナルド

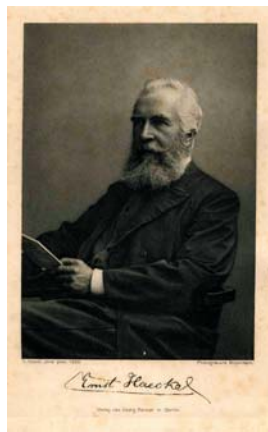


幾何学的形態測定学 生物学・数学・統計学の接点で

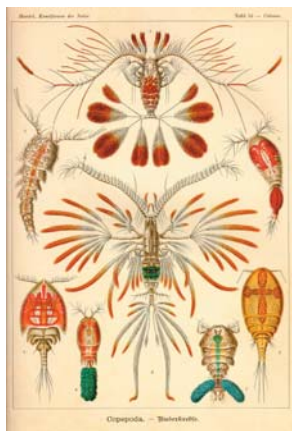
三中信宏
(農業環境技術研究所・環境統計ユニット)

Ernst Haeckel

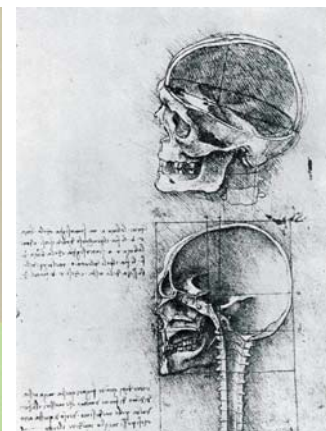
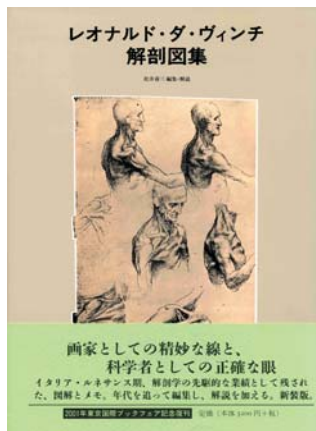
- ・比較解剖学
- ・進化形態学
- ・発生生物学
- ・体系生物学
- ・系統発生学

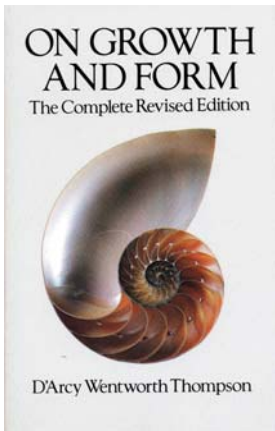


かたち



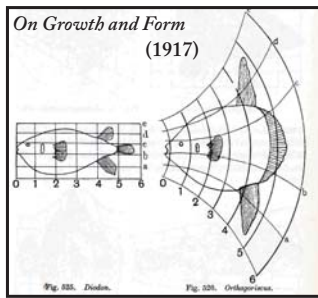
「かたち」の多様性





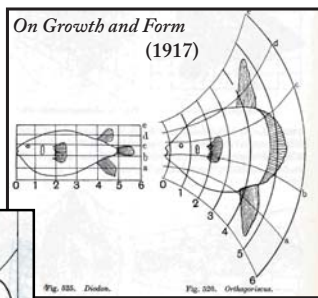
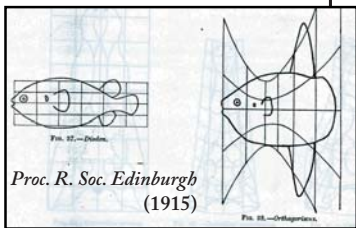
「かたち」の変化

「デカルト変換格子」を用いた形態変形の数学的記述

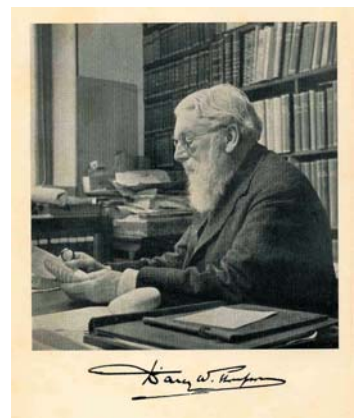


はかる

「デカルト変換格子」を用いた形態変形の数学的記述



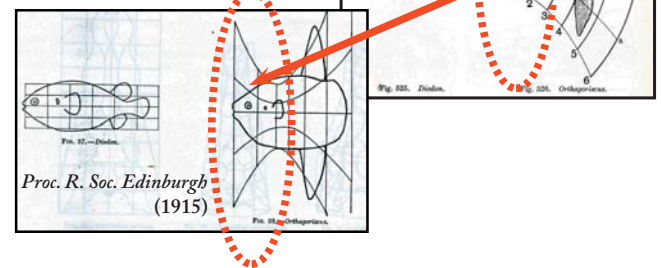
D'Arcy
Wentworth
Thompson



なぜ「かたち」の定量化は難しいのか？

- 1) 「かたち」の幾何学的特徴を記述する数学理論が従来の枠組みでは対応できなかった。

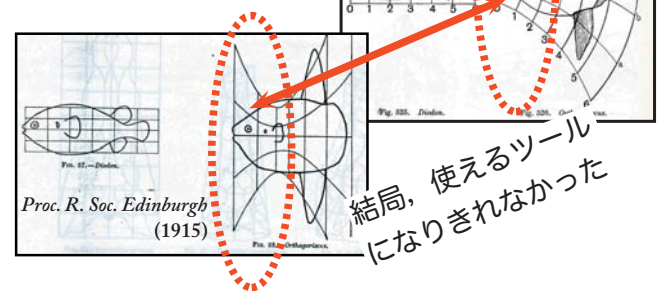
「デカルト変換格子」を用いた形態変形の数学的記述



なぜ「かたち」の定量化は難しいのか？

- 1) 「かたち」の幾何学的特徴を記述する数学理論が従来の枠組みでは対応できなかった。
- 2) 「かたち」の変量をあつかう統計学は伝統的な線形統計学だけでは力不足だった。

「デカルト変換格子」を用いた形態変形の数学的記述



なぜ「かたち」の定量化は難しいのか？

- 1) 「かたち」の幾何学的特徴を記述する数学理論が従来の枠組みでは対応できなかった。
- 2) 「かたち」の変量をあつかう統計学は伝統的な線形統計学だけでは力不足だった。
- 3) 「かたち」の数理を論じるための数学的な素養を多くの生物学者が育んでこなかった。

なぜ「かたち」の定量化は難しいのか？

その〈ルーツ〉をたどる



Fred Bookstein = landmark-based method, deformation analysis, linear statistics, ...



David Kendall = landmark-based method, Riemannian manifold, nonlinear statistics, ...

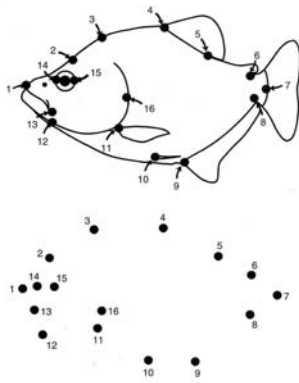
頑張る

アイデア

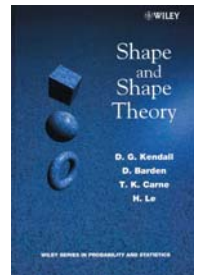
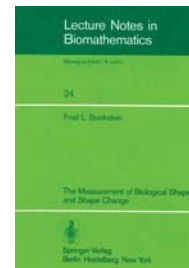
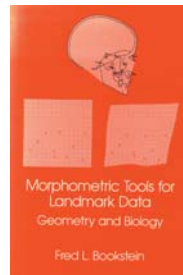
さまざまな試行錯誤と微速前進

- 1) デカルト変換格子 (変形理論)
- 2) 相対生長 (アロメトリー)
- 3) 多変量形態測定学 (数量分類学)
- 4) ステレオロジー (立体計測)
- 5) フーリエ解析 (輪郭解析)
- 6) . . .

標識点
(landmark)



幾何学的形態測定学
(geometric morphometrics)



• サイズ - シェイプ (size-and-shape)

移動と回転に対して不変である幾何学的情報

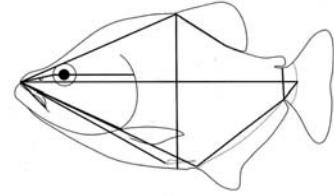
• サイズ (size)

移動と回転に対しては不変だが、拡張に対しては不変でない幾何学的情報

• シェイプ (shape)

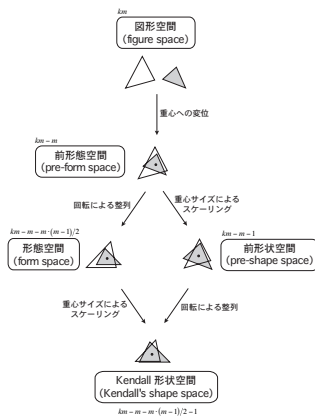
移動と回転と拡張に対して不変である幾何学的情報

標識点座標 → 距離にしてしまうと...



「数」にはなっても「幾何」ではない

形状空間論

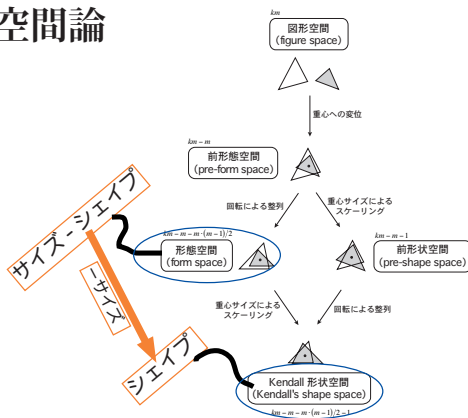


Landmark-based morphometrics

= 標識点座標データを「そのまま」用いて、「かたち」の変形や差異を分析する

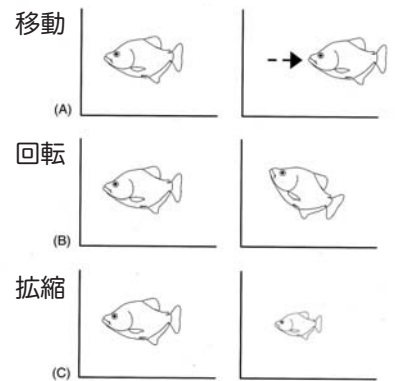
- 1) サイズ／シェイプ
- 2) 大域的／局所的
- 3) 線形／非線形

形状空間論

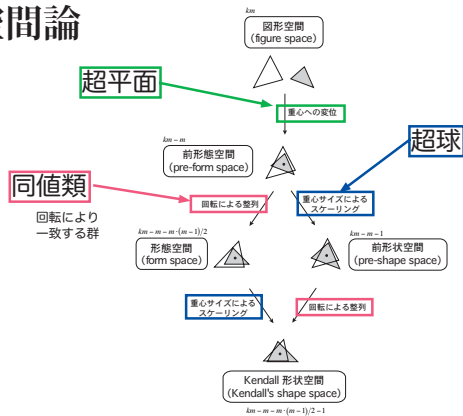


変換不変量

さまざまな幾何学的変換に対する「不変量」を考える。



形状空間論



複素平面上の k 個の 2 次元標識点 $z_i (i=1, 2, \dots, k)$ から成る “かたち”

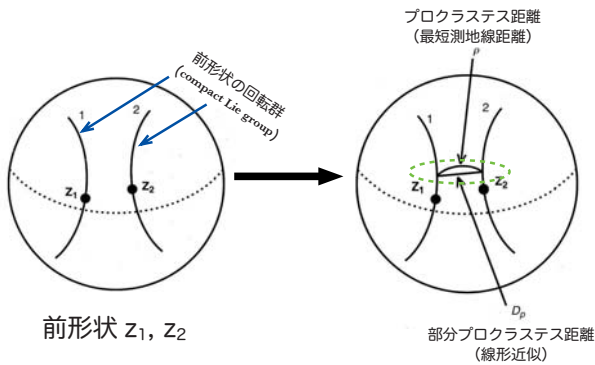
$$\mathbf{z} = \{z_i \in \mathbb{C}^1: i=1, 2, \dots, k\}$$

の変換

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' \quad (\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \mathbb{C}^k)$$

を考える。

前形状空間



元の “かたち” の重心は

$$\mathbf{z}_{\text{centroid}} = (1/k) \sum [i] z_i$$

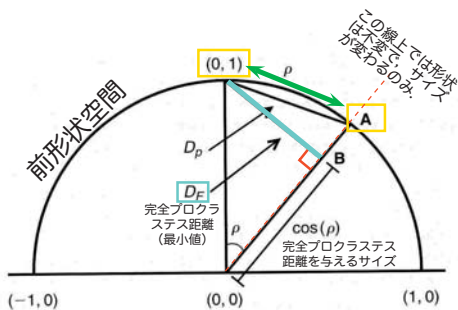
だから、重心への移動変換により

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{centroid}}$$

となる。このとき、

$$\sum [i] z'_i = 0 \quad (\text{超平面})$$

前形状空間



また、重心サイズは

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{z}' \mathbf{z}'^* = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{centroid}})(\mathbf{z} - \mathbf{z}_{\text{centroid}})^*$$

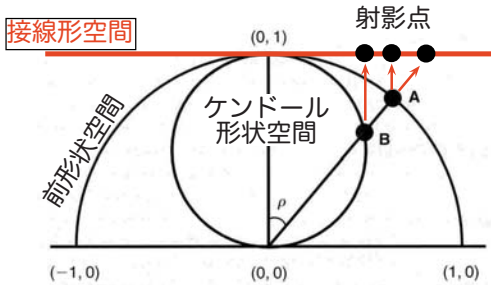
(「*」は共役複素数をあらわす)

この重心サイズ \mathbf{S} による拡縮変換は、

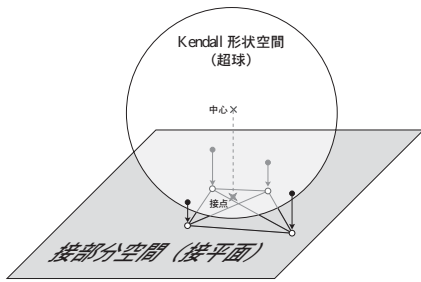
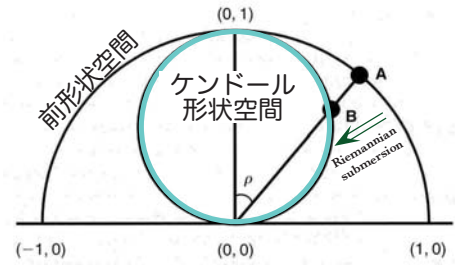
$$\mathbf{z}' \rightarrow \mathbf{z}'' = \mathbf{z}' / \mathbf{S}$$

したがって、 $\mathbf{z}'' \mathbf{z}''^* = 1$ (超球) となる。

ケンドール形状空間の「接空間」



ケンドール形状空間



David Kendall

(1984)

Bull. London Math. Soc.

形状空間は、プロクラステス距離をリーマン計量とするリーマン多様体であるという証明.

SHAPE MANIFOLDS, PROCRUSTEAN METRICS, AND COMPLEX PROJECTIVE SPACES

DAVID G. KENDALL

1. Introduction 81
2. Shape-spaces and shape-manifolds 82
3. Procrustes analysis, and the invariant (quotient) metric on Σ_2^1 87
4. Shape-measures and shape-densities 93
5. The manifold carrying the shapes of triangles 96
6. The use of the 'spherical blackboard' 100
7. The shape-density for a non-isotropic gaussian generator 106
8. Applications 113

ABSTRACT

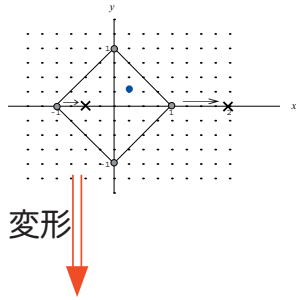
The shape-space Σ_2^1 , whose points σ represent the shapes of non totally degenerate k -sides in \mathbb{R}^2 is introduced in a quotient space carrying the quotient metric. When $m = 1$, we find that $\Sigma_2^1 = \mathbb{C}P^1$, when $m > 1$, the shape-space contains singularities. This paper deals mainly with the case $m = 2$, when the shape-space Σ_2^1 can be identified with a variety of $\mathbb{C}P^2$. Of special importance are the shape-measures induced on $\mathbb{C}P^2$ by any assigned diffuse law of distribution for the k vertices. We discuss several such statistical analysis of empirical shape distributions, and among applications we discuss the relevance of these ideas to testing for the presence of non-accidental multiple alignments in collections of (i) hand-drawn line segments and (ii) quasars. Finally the recently introduced Anaharmonic density is examined from the present point of view, its normalizing constant is found, and its connection with random Crofton polygons is established.

ひずむ

かたちの科学の
幾何学的な論議は
リーマン多様体論に
ほかならない

カーネル関数の線形結合

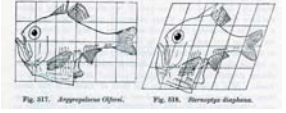
↓
 標識点対応
 ノルム最小化



“かたち”の変形とは：

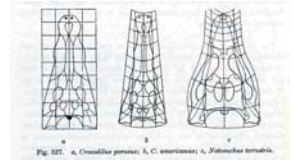
・アフィン変形

線形一次変換で表現できる shape の大域的な変形



・非アフィン変形

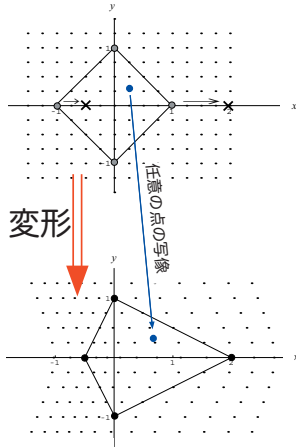
shape の非線形かつ局所的な変形



カーネル関数の線形結合

↓
 標識点対応
 ノルム最小化

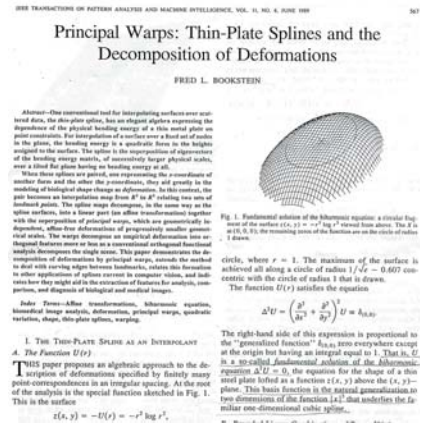
滑らかなスプライン
 補間関数の構築



Fred Bookstein (1989)

IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.

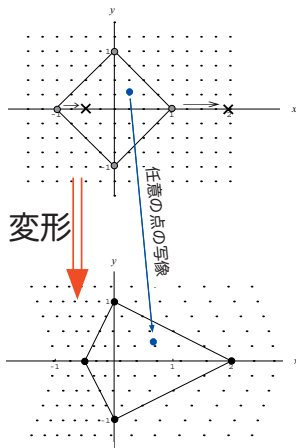
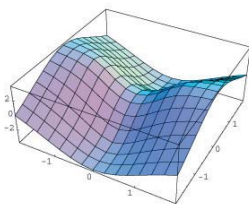
薄板スプラインを用いて形態とその局所の変形を記述する。



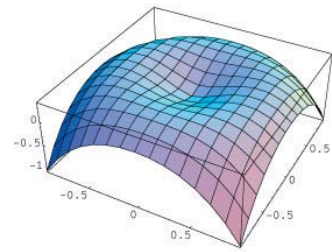
カーネル関数の線形結合

↓
 標識点対応
 ノルム最小化

滑らかなスプライン
 補間関数の構築



薄板スプラインのカーネル関数



$$U(r_{ij}) = r_{ij}^2 \log(r_{ij}^2)$$

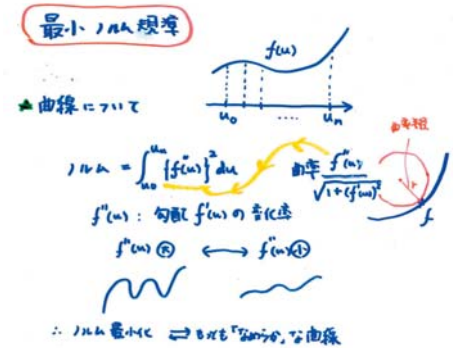
2次元の屈曲エネルギー

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy$$

m次元の屈曲エネルギー

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m=1 \\ (k_1 + \dots + k_m = m)}} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_m}} \right)^2 \right\} \times dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

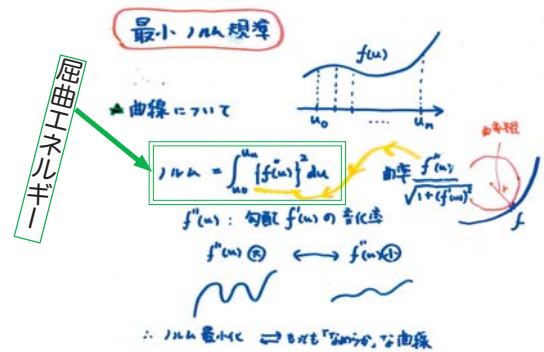
仮想変形の屈曲エネルギー最小化基準



屈曲エネルギー最小化問題の離散化

仮想変形の「屈曲エネルギー」を最小にする関数を求める変分問題はそのまま解くのが困難なので、有限個の標識点の変位によって条件づけた線形問題として離散化して解く。このとき、定積分である「屈曲エネルギー」もまた離散化され、「屈曲エネルギー行列」として表現される。

仮想変形の屈曲エネルギー最小化基準



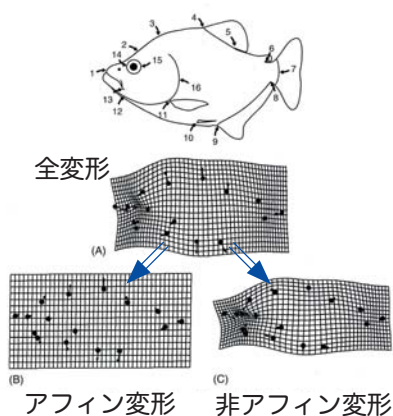
薄板スプライン関数による変形記述

$$x' = (a_{x1} \quad a_{x2} \quad a_{x3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{xi} \cdot U(r_i)$$

$$y' = (a_{y1} \quad a_{y2} \quad a_{y3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{yi} \cdot U(r_i)$$

2次元の屈曲エネルギー

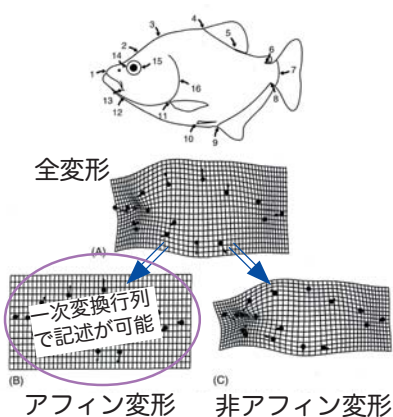
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy$$



薄板スプライン関数による変形記述

$$\begin{aligned}
 x' &= (a_{x1} \ a_{x2} \ a_{x3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{xi} \cdot U(r_i) \\
 y' &= (a_{y1} \ a_{y2} \ a_{y3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{yi} \cdot U(r_i)
 \end{aligned}$$

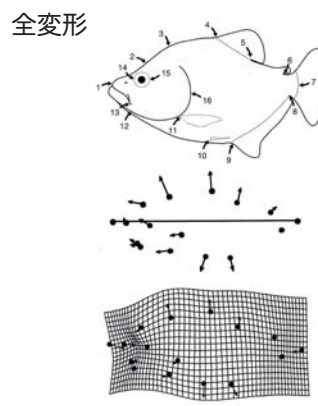
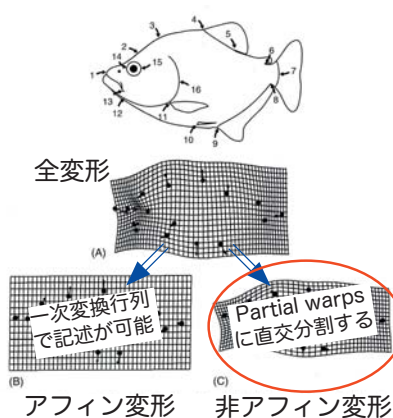
アフィン変形



薄板スプライン関数による変形記述

$$\begin{aligned}
 x' &= (a_{x1} \ a_{x2} \ a_{x3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{xi} \cdot U(r_i) \\
 y' &= (a_{y1} \ a_{y2} \ a_{y3}) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n w_{yi} \cdot U(r_i)
 \end{aligned}$$

アフィン変形 非アフィン変形



全変形

接線形空間の「正規直交基底」の構築

全変形

$$= \text{アフィン変形} + \text{非アフィン変形}$$

接線形空間の「正規直交基底」の構築

1. アフィン変形

アフィン変換行列の固有ベクトルが正規直交基底となる。 [テンソル主軸]

全変形

$$= \text{アフィン変形} + \text{非アフィン変形}$$

↓

$$= \text{アフィン変形} + (\text{部分歪み}_1 + \dots + \text{部分歪み}_n)$$

接線形空間の「正規直交基底」の構築

1. アフィン変形

アフィン変換行列の固有ベクトルが正規直交基底となる。 [テンソル主軸]

2. 非アフィン変形

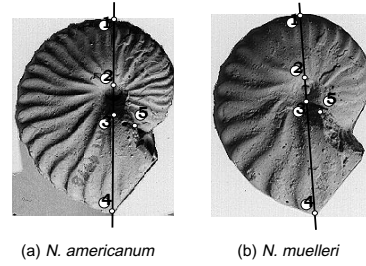
薄板スプライン関数の仮想屈曲エネルギー行列の固有ベクトルが正規直交基底となる。 [部分歪み]

アフィン／非アフィン変形への分割

全変形 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8039 & 0.2429 & 13.8553 \\ -0.0796 & 1.0959 & 66.9592 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ アフィン変形

$+ 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.1856 & 0.6919 & -0.6575 & 0.1522 & -0.0009 \\ -0.7961 & 2.9133 & -2.7237 & 0.6100 & -0.0034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ U(r_2) \\ U(r_3) \\ U(r_4) \\ U(r_5) \end{pmatrix}$

アンモナイト化石の例

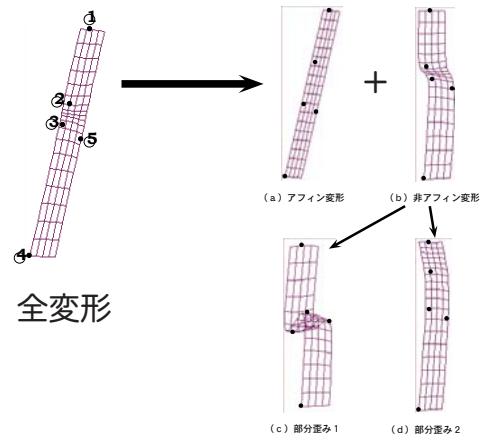


アフィン／非アフィン変形への分割

全変形 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8039 & 0.2429 & 13.8553 \\ -0.0796 & 1.0959 & 66.9592 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ アフィン変形

$+ 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.1856 & 0.6919 & -0.6575 & 0.1522 & -0.0009 \\ -0.7961 & 2.9133 & -2.7237 & 0.6100 & -0.0034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ U(r_2) \\ U(r_3) \\ U(r_4) \\ U(r_5) \end{pmatrix}$

非アフィン変形



部分歪みへの分割

非アフィン変形 $\begin{pmatrix} U(r_1) & U(r_2) & \dots & U(r_n) \\ \cdot [\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i)]^+ + \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i)^- \end{pmatrix}$

アフィン／非アフィン変形への分割

全変形 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8039 & 0.2429 & 13.8553 \\ -0.0796 & 1.0959 & 66.9592 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$+ 10^{-3} \begin{pmatrix} -0.1856 & 0.6919 & -0.6575 & 0.1522 & -0.0009 \\ -0.7961 & 2.9133 & -2.7237 & 0.6100 & -0.0034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(r_1) \\ U(r_2) \\ U(r_3) \\ U(r_4) \\ U(r_5) \end{pmatrix}$

まがる

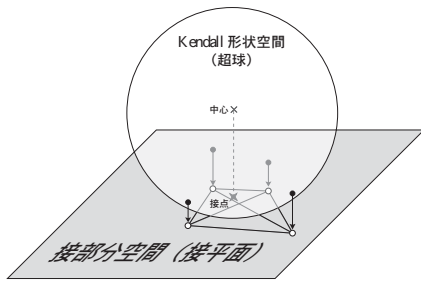
部分歪みへの分割

非アフィン変形

$$\begin{aligned}
 & (U(r_1) \ U(r_2) \ \dots \ U(r_n)) \\
 & \cdot [e_1(\lambda_1(V \cdot e_1))^2 + e_2(\lambda_2(V \cdot e_2))^2] \\
 = & (U(r_1) \ U(r_2) \ \dots \ U(r_n)) \\
 & \cdot \begin{bmatrix} 0.1210 \\ -0.6229 \\ 0.7358 \\ -0.2361 \\ 0.0022 \end{bmatrix} (0.00018692) \begin{pmatrix} -3.6822 & -15.357 \end{pmatrix} \\
 & + (U(r_1) \ U(r_2) \ \dots \ U(r_n)) \\
 & \cdot \begin{bmatrix} -0.4636 \\ 0.5849 \\ 0.4010 \\ -0.5309 \\ 0.0084 \end{bmatrix} (0.00004017) \begin{pmatrix} 2.5746 & 11.564 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

部分歪み 1

部分歪み 2

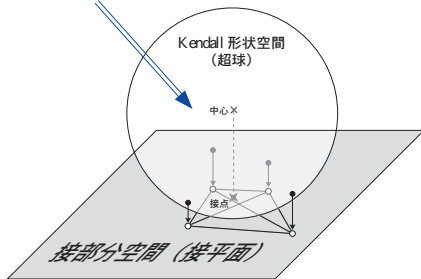


形状集団の変異
パターンの解析
('相対歪み')

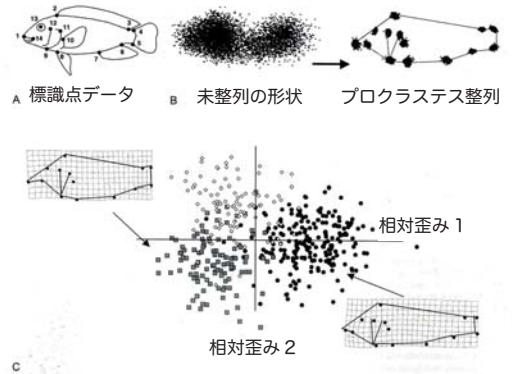
↓
薄板スプラインの
係数に関する
主成分分析



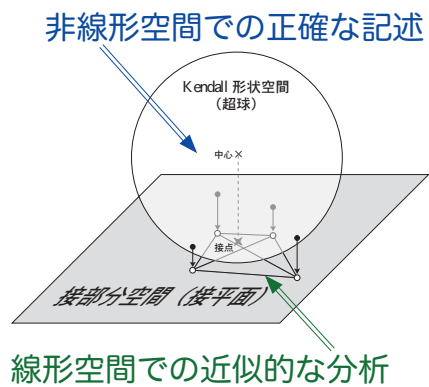
非線形空間での正確な記述



主成分軸としての相対歪み



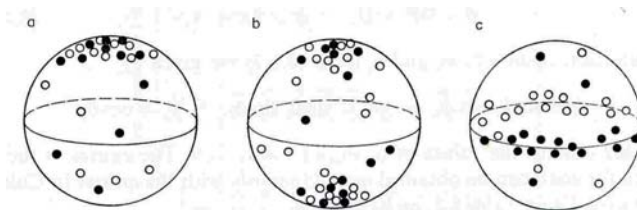
統計データのタイプ



統計データのタイプ

1. ベクトル・データ (長さ+向き)

非線形空間での統計学 (「球面統計学」)

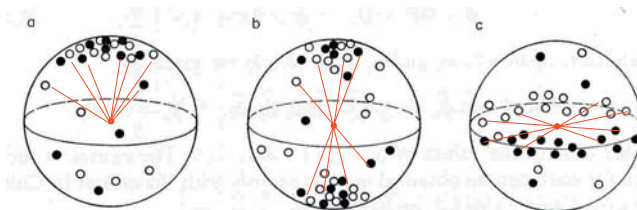


統計データのタイプ

非線形空間での統計学 (「球面統計学」)

1. ベクトル・データ (長さ+向き)

線形統計学



「方向データ」の統計理論

「方向データ」から「かたちデータ」へ



Directional statistics
Spherical statistics
Circular statistics

K. V. Mardia 1972

統計データのタイプ

線形統計学

1. ベクトル・データ (長さ+向き)

2. 方向データ (向き)

2-1. 方角データ (有向)

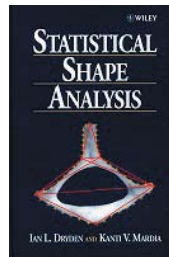
2-2. 軸性データ (無向)

「方向データ」から「かたちデータ」へ



Directional statistics
Spherical statistics
Circular statistics

Ian L. Dryden &
K. V. Mardia 1998



Shape statistics

K. V. Mardia 1972

統計データのタイプ

線形統計学

1. ベクトル・データ (長さ+向き)

2. 方向データ (向き)

2-1. 方角データ (有向)

2-2. 軸性データ (無向)

球面統計学

複素正規分布: $CN_k(m, \Sigma)$

$$f(z) = \frac{1}{\pi^k |\Sigma|} \exp\{-z^* \Sigma^{-1} (z - m)\}, z \in C^k$$

$$\text{ただし, } C^k = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T\}$$

統計データのタイプ

線形統計学

1. ベクトル・データ (長さ+向き)

2. 方向データ (向き)

2-1. 方角データ (有向)

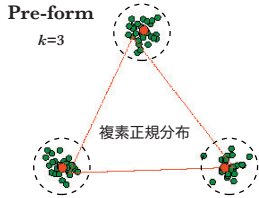
2-2. 軸性データ (無向)

球面統計学

ケンドール形状空間での“かたち”は「球面統計学」になじみやすい。

定理 (J. T. Kent 1994) :

$$\text{If } \boldsymbol{w} \sim \text{CN}_k(\mathbf{0}, \Sigma), \text{ then } \boldsymbol{w} \mid_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^*=\mathbf{1}} \sim \text{CB}_{k-1}(-\Sigma^{-1}).$$



複素正規分布 : $\text{CN}_k(\boldsymbol{m}, \Sigma)$

$$f(\boldsymbol{z}) = \{\pi^k |\Sigma|\}^{-1} \exp\{-(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m})^* \Sigma^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m})\}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^k$$

$$\text{ただし, } \mathbb{C}^k = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T\}$$

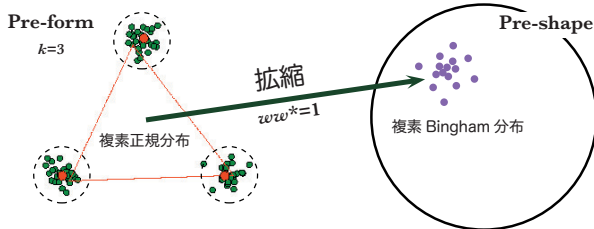
複素 Bingham 分布 : $\text{CB}_{k-1}(\boldsymbol{A})$

$$f(\boldsymbol{z}) = c(\boldsymbol{A})^{-1} \exp(\boldsymbol{z}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{k-1}$$

$$\text{ただし, } \mathbb{C}S^{k-1} = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T : \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* = \mathbf{1}\}$$

定理 (J. T. Kent 1994) :

$$\text{If } \boldsymbol{w} \sim \text{CN}_k(\mathbf{0}, \Sigma), \text{ then } \boldsymbol{w} \mid_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^*=\mathbf{1}} \sim \text{CB}_{k-1}(-\Sigma^{-1}).$$



複素正規分布 : $\text{CN}_k(\boldsymbol{m}, \Sigma)$

$$f(\boldsymbol{z}) = \{\pi^k |\Sigma|\}^{-1} \exp\{-(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m})^* \Sigma^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{m})\}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^k$$

$$\text{ただし, } \mathbb{C}^k = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T\}$$

複素 Bingham 分布 : $\text{CB}_{k-1}(\boldsymbol{A})$

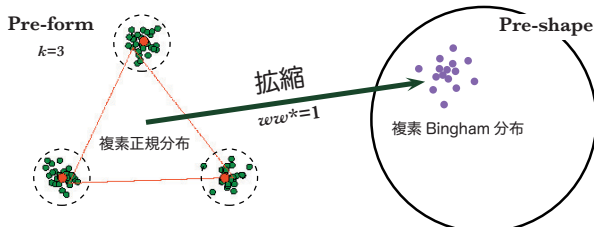
$$f(\boldsymbol{z}) = c(\boldsymbol{A})^{-1} \exp(\boldsymbol{z}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{z}), \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}S^{k-1}$$

$$\text{ただし, } \mathbb{C}S^{k-1} = \{\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)^T : \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* = \mathbf{1}\}$$

球面分布

定理 (J. T. Kent 1994) :

$$\text{If } \boldsymbol{w} \sim \text{CN}_k(\mathbf{0}, \Sigma), \text{ then } \boldsymbol{w} \mid_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^*=\mathbf{1}} \sim \text{CB}_{k-1}(-\Sigma^{-1}).$$



定理 (J. T. Kent 1994) :

$$\text{If } \boldsymbol{w} \sim \text{CN}_k(\mathbf{0}, \Sigma), \text{ then } \boldsymbol{w} \mid_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^*=\mathbf{1}} \sim \text{CB}_{k-1}(-\Sigma^{-1}).$$

複素 Bingham 分布に基づく“かたち”のパラメトリック球面統計学

それはなぜか？

最後に

All these people are asking questions about *shape*. It is not appropriate, however, to think of shapes as points in a Euclidean space. They are odd creatures, and live in peculiar and quite particular spaces most of which occur in no other context. Thus what is required is a revised version of multidimensional statistics that takes the nature of the *shape space* fully into account.

Huiling Le & David G. Kendall (1993)

The Annals of Statistics, 21(3), p. 1225.

「かたち」そのものが
生物学・統計学・数学が
予想もしなかった
性格をもつ存在だった。

「かたち」を「はかる」
ことによって
はじめて解決できる
問題群がある

ところが、いままでは
「かたち」を「はかる」
適切な理論枠とツールを
もつことができなかった。

形態測定学

による

革命

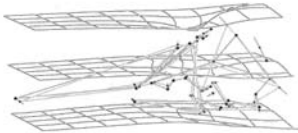
〈形態測定学革命〉

(1990年代～)

Proceedings of the Rome Geometric Morphometrics
Workshop
Homage to Leslie F. Marcus

Atti del Laboratorio di Morfometria Geometrica

Guest editors: A. Loy, M. Corti, D. C. Adams, D. E. Slice, F. J. Rohlf



Roma, Museo Civico di Zoologia
January 14-18, 2002

〈形態測定学革命〉

(1990年代～)



Trends in Ecology and Evolution (1993)

幾何学的形態測定学

の／による

1990年代の

「革命」は

比較生物学に

何をもたらしたか？

Geometric morphometrics: ten years of progress following the 'revolution'

DEAN C. ADAMS
Department of Ecology, Evolution, and Organismal Biology, and
Department of Statistics,
Iowa State University,
Ames IA 50011-5425 (U.S.A.)
E-mail: adams@iastate.edu

F. JAMES ROHLF
Department of Ecology and Evolution,
Iowa State University, and
State University of New York at Stony Brook,
Stony Brook, NY 11794-5240 (U.S.A.)
E-mail: rohlf@life.iastate.edu

DENNIS E. SLICE
Institute for Anthropology, University of Vienna, and
Department of Medical Engineering,
Wake Forest University School of Medicine,
Winston-Salem, NC 27157-5222 (U.S.A.)
E-mail: dslice@wake.edu

ABSTRACT

The analysis of shape is a fundamental part of much biological research. As the field of anatomy developed, so have the sophistication of the analysis of these types of data. This led to multivariate morphometrics in which ratios of measurements were analyzed together using canonical variates analysis, principal components analysis, and related methods. In the 1980s, a fundamental change began in the nature of the data gathered and analyzed. This change focused on the coordinates of landmarks and the geometric information about their relative positions. As a by-product of such an approach, results of multivariate analysis could be visualized as configurations of landmarks back in the original space of the organism rather than only as statistical scatter plots. This new approach, called 'geometric morphometrics', had been introduced by Rohlf and Marcus (1991) to proclaim a 'revolution' in morphometrics. In this paper, we briefly update the discussion in that paper and summarize the advances in the ten years since the paper by Rohlf and Marcus. We also speculate on future directions in morphometric analysis.

形態測定学

の

革命

「かたち」を幾何学的に
測定・分析・考察するため
の実用的ツールが
初めて手に入った.

引用分析

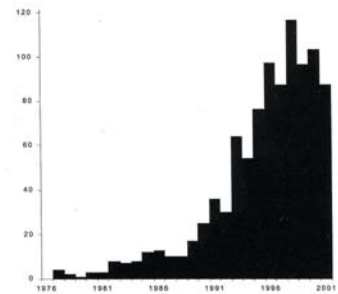


Fig. 1 - Geometric morphometric citations per year from 1976 to 2001. Data from merging Lynch's morphometric bibliographic data base. <http://www.public.asu.edu/~jmlynch/geomorph/index.html> with Web of Science (<http://www.isinet.com>) citation searches for Rohlf & Slice (1990), Bookstein (1991), Rohlf & Marcus (1993), Marcus et al. (1996).

大団円